ENS CACHAN **LICENCE DE MATHEMATIQUE**
2009-2010

Cours Intégration-Probabilités
Feuille 4

1. Enoncés des exercices

Exercice 1. (Inégalité de Jensen)

(1) Soit f une variable aléatoire réelle L^1 sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et ϕ une fonction convexe telle que $\phi \circ f$ est L^1. Montrer que

$$\phi(\int f d\mu) \leq \int \phi \circ f d\mu \qquad \text{(Inégalité de Jensen).} \tag{1.1}$$

(2) (Cas d'égalité 1) Supposons dans ce cas que μ n'est pas une mesure de Dirac. (Dans le cas d'une mesure de Dirac, on a toujours égalité.) Quel est l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute variable aléatoire f, on ait l'égalité dans (1.1).

(3) (Cas d'égalité 2) Fixons maintenant $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *strictement* convexe. Montrer qu'on n'a égalité dans l'équation (1.1) que pour les variables aléatoires f constantes μ-presque sûrement.

Exercice 2. (Simulation de variables aléatoires)
On suppose que l'on sait simuler une variable aléatoire uniforme U sur $[0,1]$. Comment simuler une variable aléatoire de fonction de répartition F donnée ? (*on pourra considérer* $G(U)$ *dans l'esprit de la démonstration du théorème 9 du cours où* $G : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ *est la pseudo-inverse de* F *donnée par* $G(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\}$ *puis montrer que* $t \leq F(x) \Leftrightarrow G(t) \leq x$ *pour tout* $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$)

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
1) Montrer que si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite de n événements alors on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\
&+ \cdots + (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}) \\
&+ \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}$$

2) Un monsieur distrait écrit n lettres différentes à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'un destinataire au moins reçoive la lettre qui lui était destiné ?
3) On lance r balles dans n cases $(r, n > 0)$. Calculer la probabilité qu'aucune case ne soit vide.

Exercice 4. (Construction d'un modèle pour un nombre infini de lancer de pièces)
Pour tout $x \in [0,1[$, on note $x_n \doteq \lfloor 2^n x \rfloor - 2\lfloor 2^{n-1} x \rfloor$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(x_n)_{n \geq 1} \in \Omega \doteq \{0,1\}^{\mathbb{N}_*}$ et que pour tout $n \geq 0$, on a
$$\sum_{i=1}^n x_i 2^{-i} \leq x < \sum_{i=1}^n x_i 2^{-i} + 2^{-n}$$

(2) On considère sur Ω les applications coordonnées $X_n : \Omega \to \{0,1\}$ telles que $X_n(\omega) \doteq x_n$ pour $\omega = (x_n)_{n \geq 1}$ et $\mathcal{F} \doteq \sigma(X_n,\ n \geq 1)$ la tribu engendrée par les coordonnées. Montrer que $\Psi : [0,1[\to \Omega$ définie par $\Psi(x) \doteq (x_n)_{n \geq 1}$ est mesurable de $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[) \to (\Omega, \mathcal{F})$.

(3) Soit P la mesure image de la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Vérifier que sous P, les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ et que pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \{0,1\}^n$ on a

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = 2^{-n}.$$

On dit alors que les variables aléatoires sont indépendantes (la définition générale de l'indépendance sera donnée dans le prochain chapitre).

Exercice 5. (Mesures de Gibbs)
Soient μ et ν deux probabilités boreliennes sur $\mathbb{R}^d$.

(1) On suppose dans cette question que $\mu << \nu$. Montrer que $\int \log^{-}(\frac{d\mu}{d\nu}) d\mu < +\infty$.

(2) On ne suppose plus $\mu << \nu$ et on définit la distance de Kullback-Leibler entre μ et ν par :

$$K(\mu, \nu) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \mu \not\ll \nu \\ \\ \int \log(\frac{d\mu}{d\nu}) d\mu & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $K(\mu, \nu) \geq 0$ et que $K(\mu, \nu) = 0$ ssi $\mu = \nu$.

(3) Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borelienne telle que $Z_h \doteq \int \exp(h) d\nu < \infty$. On suppose également que h est bornée ν ps. On note $\nu_h = \frac{\exp(h)}{Z_h} \nu$. Montrer que

$$K(\mu, \nu) = K(\mu, \nu_h) + \mu(h) - \log(Z_h),$$

et vérifier que

$$\log(Z_h) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d), \mu \ll \nu} \{\mu(h) - K(\mu, \nu)\}$$

et est atteint pour $\mu = \nu_h$.

(4) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\nu_{\beta h}$ est l'unique solution de $\mathcal{P}_m$

$$(\mathcal{P}_m) \left| \begin{array}{l} \min K(\mu, \nu) \\ \\ \text{avec } \mu(h) = m \end{array} \right.$$

lorsque $m = \nu_{\beta h}(h)$.

(5) Revisiter au travers de ce procédé les lois classiques connues.

Exercice 6. (Inégalité de Markov)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que pour tout $A > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| > A) \leq A^{-p} \mathbb{E}(|X|^p)$$

Exercice 7. (Indice aléatoire)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires. On définit Y_N par

$$Y_N(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega)$$

Montrer que Y_N est une variable aléatoire.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que l'ensemble des variables aléatoires réelles $\sigma(X)$-mesurables est exactement l'ensemble des fonctions $f(X)$ où f est une fonction borélienne.

Exercice 9. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et $(\mathcal{F}_k)_k$ la suite de tribus définies par $\mathcal{F}_k = \sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$. Soit $\mathcal{C}$ la tribu asymptotique définie par $\mathcal{C} = \cap_k \mathcal{C}_k$. Montrer que les variables aléatoires $\limsup X_n$ et $\liminf X_n$ sont $\mathcal{C}$-mesurables.