ENS CACHAN **LICENCE DE MATHEMATIQUES**
2009-2010

Cours Intégration-Probabilités
Formule du changement de variables
Feuille 3

Exercice 1 (La formule du changement de variables)**.** Commençons par énoncer le théorème du changement de variables.

Théorème 1. *Soit* $\varphi : U \to V$ *un* C^1 *difféomorphisme entre deux ouverts* U *et* V *de* $\mathbb{R}^n$*. On désignera par* $\varphi'(x)$ *la différentielle et par* $J_\varphi(x) = \det(\varphi'(x))$ *le jacobien de* φ *au point* $x \in U$*. On a :*
a) Pour tout borélien A *de* U*, l'image* $\varphi(A)$ *est un borélien de* V *et*

$$\lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |J_\varphi(x)| dx\,.$$

b) Pour toute fonction $f \geq 0$ *borélienne sur* V *on a*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx\,.$$

et plus généralement pour tout borélien B *de* V

$$\int_B f(y)dy = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx\,.$$

c) Pour toute fonction borélienne sur V *, la condition que* f *soit intégrable sur* V *est identique à la condition que la fonction* $|J_\varphi(x)|f(\varphi(x))$ *soit intégrable sur* U *et dans ce cas, on a la formule du changement de variables*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx\,.$$

Le but des questions qui suivent est de démontrer ce théorème.

(1) (a) Supposons que $0 \in U$, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = \mathrm{Id}$. Montrer que pour tout pavé ouvert $Q \subset U$ centré en 0, on a

$$\frac{1}{1+\alpha} Q \subset \phi(Q) \subset (1+\beta)Q$$

où $\alpha = \alpha(Q)$ et $\beta = \beta(Q)$ peuvent être choisis pour tendre vers 0 lorsque le diametre de Q tend vers 0.

(b) Etendre au cas d'un point quelconque $a \in U$, sans condition sur la valeur de $\phi(a)$ ou de $\phi'(a)$.

(c) Montrer enfin que l'on peut obtenir un résultat uniforme sur tout ouvert $U_0 \subset \overline{U_0} \subset U$ tel que $\overline{U_0}$ est compact : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout pavé Q dans U_0 de diamètre inférieure ou égal à δ

$$\phi(a) + \frac{1}{1+\epsilon}\phi'(a)(Q-a) \subset \phi(Q) \subset \phi(a) + (1+\epsilon)\phi'(a)(Q-a)$$

où a est le centre de Q.

(2) (a) Montrer maintenant que pour un tel U_0 on a

$$\lambda_n(\phi(U_0)) = \int_{U_0} |J_\phi(x)| dx$$

puis que cette egalité reste vraie pour tout borélien inclus dans U.

(b) Montrer que pour tout borélien B de V, on a

$$\lambda_n(B) = \int \mathbf{1}_B(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx$$

puis que pour toute fonction f borélienne positive sur V,

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx\,.$$

(c) En déduire le point c).

APPLICATIONS

Exercice 2 (Aire des surfaces de $\mathbb{R}^3$)**.** On appellera morceau de surface S la donnée d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (espace des paramètres (u,v)) et d'une application injective $(u,v) \to M(u,v)$ de U dans $\mathbb{R}^3$ ayant les propriétés suivantes :

(1) M est de classe C^1 sur l'ouvert U.

(2) Pour tout $(u,v) \in U$, les vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}$ forment un système libre.

On sait alors que S admet en chaque point M un plan tangent, engendré par les les vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}$. A tout élément d'aire $dudv$ dans l'espace des paramètres correspond l'élément d'aire défini dans le plan tangent par le parallélogramme associé aux accroissements $\dfrac{\partial M}{\partial u}du$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}dv$ et dont la valeur est

$$H(u,v)dudv = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| dudv\,.$$

Ceci invite alors à définir la mesure d'une partie borélienne B de S par la formule

$$m(B) = \int\int_{M^{-1}(B)} H(u,v)dudv$$

On montrera que si l'on effectue un changement de paramétrisation de classe C^1, $u = \phi(s,t), v = \psi(s,t)$, alors $m(B)$ ne change pas.

Exercice 3 (Fonctions Beta et Gamma)**.** On rappelle que la fonction Gamma Γ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ et que la fonction Beta B est définie pour $s,t \in \mathbb{R}_+^*$ par $B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds$. Montrer que

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exercice 4 (Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$)**.** Soit $P = \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty);\ \|x\| \le r\}$ avec $\|\cdot\|$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. En calculant de deux manières différentes l'intégrale

$$I = \int_P r\exp(-r^2/2)dxdr$$

donner le volume V_n de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. [Inégalité de Hardy] Soit p un réel strictement superieur à 1.

5.1. *Soit* $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ *positive. On pose* $F(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. *Le but de la question est de montrer que* F *est dans* $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ *et que :*

$$\int_0^\infty |F|^p(x)dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f|^p(x)dx$$

a) Etablir le résultat lorsque f *est continue positive.*

b) En déduire le résultat lorsque f *est continue et de signe quelconque.*

c) Traiter le cas général.

5.2. *Montrer que cette constante est optimale (ind. : on pourra utiliser des fonctions puissances).*