ENS CACHAN **LICENCE DE MATHEMATIQUES**
2009-2010

Cours Intégration-Probabilités
Caractérisation de la mesure de Lebesgue, théorèmes d'Egorov et Lusin
Feuille 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Nous rappelons (cela est démontré dans le chapitre 3 du cours) l'existence d'une mesure borelienne sur $\mathbb{R}^n$, appelée mesure de Lebesgue et notée λ_n, telle que pour tout pavé $P = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ on a

$$\lambda_n(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Exercice 1 (Caractérisation de la mesure de Lebesgue)

1. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\mathbb{R}^n$ vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_n(B+u) = \lambda_n(B) .$$

2. Soit μ une mesure borelienne sur $\mathbb{R}^n$ de masse finie sur les compacts (ie une mesure de Radon) invariante par les translations de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'alors μ est égale à $k\lambda_n$ où k est une constante positive finie.

Exercice 2 (La mesure de Lebesgue et les applications linéaires) Le but de cet exercice est de montrer que si $T \in GL_n(\mathbb{R})$ alors pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lambda_n(T(B)) = |\det(T)|\lambda_n(B) . \tag{0.1}$$

1. Montrer qu'il existe $k_T > 0$ tel que pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda_n(T(B)) = k_T\lambda_n(B)$.
2. Vérifier (0.1) lorsque T est diagonale puis symétrique et enfin orthogonale.
3. Si T quelconque, en utilisant la décomposition $T = US$ où U est orthogonale et S symétrique, conclure dans le cas général.
4. Montrer que tout hyperplan est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 3 (d'après Rudin) On considère ici la mesure de Lebesgue en dimension 1, notée λ.

1. Soit E est le compact triadique de Cantor sur $[0,1]$ (on part de $E_0 = [0,1]$ puis on construit E_1 en enlèvant le segment ouvert central de longeur 1/3 donnant deux segments fermés $[0,1/3]$ et $[1/3,1]$. On continue de façon récursive sur chacun des segments et on définit $E = \cap_{n\geq 0} E_n$). Montrer que E et $\mathbb{R}$ ont même cardinalité bien que $\lambda(E) = 0$.
2. Soit $\epsilon \in]0,1[$. Construire un ensemble $E \subset [0,1]$ qui est dense dans $[0,1]$ et tel que $\lambda(E) = \epsilon$.
3. Construire un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$ dont toutes les composantes connexes sont réduites à un point et pour lequel $\lambda(K) > 0$.
4. (Difficile) Construire un borélien $E \subset \mathbb{R}$ tel que

$$0 < \lambda(E \cap I) < \lambda(I)$$

pour tout segment ouvert I.

Théorème 1 (Théorème d'Egorov) *Soit* $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction* f. *Soit* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *tel que* $\lambda(E) < \infty$. *Alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $A \subset E$ *tel que :*
i) f_i *converge uniformément vers* f *sur* A,
ii) $\lambda(E \setminus A) < \epsilon$.
En d'autres termes : toute suite convergeant simplement converge en fait uniformément sur le complémentaire d'un ensemble de mesure arbitrairement petite.

Exercice 4 On se propose de montrer le théorème d'Egorov.

1. On note F l'ensemble des points x de E tels que $(f_i(x))_i$ ne converge pas. Soit pour tout $m, k \in \mathbb{N}^*$,
$$E_{m,k} = \cup_{j=m}^{\infty} \left\{ x \in E \backslash F;\ |f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$
Montrer que $\lim_{m\to\infty} \lambda(E_{m,k}) = 0$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier non nul m_k tel que $\lambda(E_{m_k,k}) < 2^{-k}\epsilon$ et conclure.

Théorème 2 (Théorème de Lusin) *Toute fonction mesurable de* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *à support compact* K *est continue en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue arbitrairement petite.*

Exercice 5 On se propose de démontrer le théorème de Lusin

1. Montrer le resultat lorsque $f = \mathbf{1}_A$ puis lorsque f est une fonction étagée.
2. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ à support compact. Montrer que f est une limite uniforme de fonction étagées à support compact.
3. Montrer le résultat dans le cas précédent puis dans le cas général.