

Cours Intégration-Probabilités
Limites sup, limite inf, Riemann intégrabilité
Feuille 1

Ce premier td démarre avec des petits exercices qui n'ont d'autres buts que vous mettre à l'aise avec les notions de limites sup et limites inf qui ne sont pas officiellement aux programmes des prépas et seront utilisées assez systématiquement dans le cours d'intégration-proba. Ils sont extraits d'une liste d'exercices proposés par Charles Suquet, et disponibles en ligne [ici](http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/IFP/indexIFP.html) ou à l'adresse :

<http://math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/IFP/indexIFP.html>

On termine par la preuve du théorème de caractérisation des fonctions Riemann intégrables sur un intervalle compact

Exercice 1 Soit $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}}$ une suite double de réels positifs. Montrer l'inégalité

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} u_{n,k} \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}}^+,$$

et donner un exemple où elle est stricte.

Exercice 2

1. On rappelle que pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de réels, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} u_k$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est appelée limite supérieure de (u_n) , notée $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$ ou souvent plus simplement $\overline{\lim} u_n$. De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} u_k$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est appelée limite inférieure de (u_n) , notée $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n$. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$, $\underline{\lim} u_n \leq \overline{\lim} u_n$ et qu'il y a égalité si et seulement si la suite u_n converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences

$$\lim u_n = l \Leftrightarrow \overline{\lim} |u_n - l| = 0$$

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \underline{\lim} u_n = +\infty;$$

3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. On pose $a = \underline{\lim} u_n$ et $b = \overline{\lim} u_n$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers a et une sous-suite qui converge vers b .

Exercice 3 Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'éléments de \mathbb{R} .

1. Montrer que $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim} a_n$.
2. Montrer que $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$, à condition qu'aucune des sommes concernées ne soit de la forme " $\infty - \infty$ ". Donner un exemple montrant que l'inégalité peut être stricte.
3. Lorsque $a_n \leq b_n$ pour tout n , montrer que $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$. Donner un exemple où les limites inférieures sont égales, bien que $a_n < b_n$ pour tout n .

Exercice 4 (Convergence dominée pour les séries) On considère une suite double de réels $(u_{n,k}; (n,k) \in \mathbb{N}^2)$ et une suite de réels $(a_k; k \in \mathbb{N})$ vérifiant les hypothèses suivantes.

- a) $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, |u_{n,k}| \leq a_k$.
- b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,k} = u_k \in \mathbb{R}$.
- c) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$.

1. Montrer que les séries $\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ convergent absolument dans \mathbb{R} .
2. Vérifier que pour tout entier N ,

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - u_{n,k}) \right| + 2 \sum_{k=N}^{+\infty} a_k.$$

3. Prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n,k}.$$

4. Donner un exemple de suite double $(u_{n,k}; (n,k) \in \mathbb{N})$ vérifiant b) et telle que pour tout n la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}$ converge absolument dans \mathbb{R} , mais pour laquelle la conclusion de la question précédente est en défaut.

Dans le dernier exercice, on cherche à démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 Une fonction f est Riemann intégrable sur I ssi l'ensemble de ses points de discontinuité est un ensemble négligeable.

Exercice 5 Pour tout $\tau > 0$, on introduit une mesure de l'oscillation à l'échelle τ de f au travers de la fonction $\omega_{\tau} : I \rightarrow [0, \infty[$ définie pour tout $x \in I$ par

$$\omega_{\tau}(x) \doteq \sup_{y,z \in I, |y-x| \leq \tau, |z-x| \leq \tau} |f(z) - f(x)|.$$

Comme à $x \in I$ fixé, $\tau \rightarrow \omega_{\tau}(x)$ est croissante, on définit l'oscillation de f par

$$\omega = \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau > 0} \omega_{\tau}.$$

1. Vérifiez que f est discontinue en x ssi $\omega(x) > 0$.
2. Pour tout $\eta > 0$, on note $D_{\eta} = \omega^{-1}([\eta, +\infty[)$ l'ensemble des points d'oscillation plus grande que η . Vérifier que si $g \leq f \leq h$ sont deux fonctions en escalier encadrant f et $\sigma = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une subdivision subordonnée à g et h , alors en notant $I_i \doteq]x_i, x_{i+1}[$, on a :
 - (a) pour tout $0 \leq i < n$ tel que $I_i \cap D_{\eta} \neq \emptyset$, on a $h_i - g_i \geq \eta$
 - (b) $I(h) - I(g) \geq \eta \sum_{i \in A} \ell(I_i)$ où $A = \{0 \leq i < n \mid I_i \cap D_{\eta} \neq \emptyset\}$.
3. En déduire que si f est Riemann intégrable, alors D_{η} est négligeable puis la première implication du résultat.
4. (Délicat) On suppose maintenant que les points de discontinuité de f forment un ensemble négligeable. Soit $\eta > 0$ et $U_{\eta} = \omega^{-1}([0, \eta])$.
 - (a) Vérifier que U_{η} est ouvert et puis que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille finie $(J_j)_{1 \leq j \leq q}$ d'intervalles fermés disjoints (2 à 2) tels que $K \doteq \cup_{j=1}^q J_j \subset U_{\eta}$ et $\sum_{j=1}^q \ell(J_j) \geq (b-a) - \epsilon$.
 - (b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in K$, $|f(z) - f(y)| \leq \eta$ dès que $|z - y| \leq \delta$.
 - (c) En déduire l'existence de deux fonctions en escalier g et h encadrant f telles que

$$I(h) - I(g) \leq \eta(b-a) + 2M\epsilon$$

où M est un majorant de $|f|$ sur I .

- (d) Déduire la réciproque.