ENS Cachan **Cours Intégration Proba**

LICENCE DE MATHEMATIQUES **2007-2008**

Partiel (durée 3h)

Jeudi 8 Novembre 2007

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Le partiel n'est pas long. Les réponses aux questions doivent être rédigées avec soin.

Exercice 1.

(1) Enoncer le théorème de continuité sous le signe somme.

(2) On considère $f(t,x) : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $f(t,x) = 0$ pour $x \geq t$, $f(t,x) = 4x/t^2$ si $x \in [0, t/2[$ et $f(t,x) = 4(t-x)/t^2$ si $x \in [t/2, t[$. Vérifier que $x \to f(t,x)$ est continu pour tout $t \in [0,1]$. Que dire de la continuité de $F(t) = \int_0^1 f(t,x)dx$ en $t = 0$? Pourquoi le théorème précédent ne s'applique t-il pas ?

Exercice 2.

(1) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que si une suite (f_n) de fonctions de $(E,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est telle que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge presque partout et qu'il existe g intégrable telle que $|\sum_{k=0}^n f_k| \leq g$ p.p. pour tout $n \geq 0$, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est intégrable et $\int \sum_{n\geq 0} f_n d\mu = \sum_{n\geq 0}\int f_n d\mu$.

(2) Montrer que $\int_0^1 dy/(1+y^2) = \frac{\pi}{4}$ puis que $\pi/4 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(2n+1)$.

Exercice 3.

(1) Rappeler le lemme de Fatou.

(2) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions μ-intégrables (non nécessairement positives) tel que $\sup_{n\geq 0}\int f_n(x)d\mu(x) < \infty$.

  (a) On suppose dans cette question qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $f_n \geq f$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $\underline{\lim}\, f_n$ est intégrable.

  (b) On ne suppose plus l'existence de f mais seulement que $\int f_n d\mu(x) > -\infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que l'on ne peut plus assurer l'intégrabilité de $\underline{\lim}\, f_n$.

Exercice 4. Soit $E \doteq \{\ f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ |\ \int |f|(x)dx < \infty$ et $\int |f'|^2(x)dx < \infty\}$. Pour tout $f \in E$, on note $\|f\|_E \doteq \|f\|_1 + \|f'\|_2$.

(1) Montrer que E est un espace vectoriel normé. L'espace E est-il complet ?

(2) Soit $f \in E$.

  (a) Montrer que pour tout $x < y \in \mathbb{R}$, on a $|f(y) - f(x)| \leq \|f'\|_2\sqrt{y-x}$.

  (b) En déduire que f est uniformement continue, puis que f est bornée et enfin que $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

(3) On considère une suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E.

  (a) Montrer qu'il existe $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et g_∞ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telles que $\|f_n - f_\infty\|_1 \to 0$ et $\|f'_n - g_\infty\|_2 \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

  (b) En considérant une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge simplement presque partout vers f_∞, montrer que f_∞ est presque partout égale à une fonction uniformement continue notée $\tilde{f}_\infty$.

  (c) Montrer alors que $\tilde{f}_\infty(y) - \tilde{f}_\infty(x) = \int_x^y g_\infty(t)dt$ puis déduire que $\tilde{f}_\infty$ est dérivable presque partout de dérivée presque partout égale à g_∞.

  (d) (bonus) Sauriez-vous montrer qu'en fait, $\tilde{f}_\infty$ est la limite simple des f_n ?

(4) (bonus) Soit $W \doteq \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})\ |\ \int |f|(x)dx < \infty$ et $\exists g \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ tel que $f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt\ \}$. On note pour $f \in W$, $\|f\|_W \doteq \|f\|_1 + \|g\|_2$. Montrer que W est un Banach, que $E \subset W$ et E est dense dans W.