ENS Cachan **Cours Intégration Proba**
Licence de Mathématiques **2006-2007**

Partiel (durée 3h)
Jeudi 9 Novembre 2006
Les notes de cours ne sont pas autorisées

Le partiel n'est pas long. Les réponses aux questions doivent être rédigées avec soin.

Exercice 1.

(1) (1.5 pts) Enoncer précisemment le théorème de convergence dominé.

(2) (1.5 pts)Etudier la limite de la suite $I_n = \int_0^1 \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}dx$.

Exercice 2. Soit μ une mesure borelienne sur $\mathbb{R}^d$.

(1) (2 pts)Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour μ (on pourra par exemple considérer les pavés ouverts à extrémités dans $\mathbb{Q}$). On appelle support de μ le complémentaire de cet ouvert.

(2) (2 pts)Montrer que si μ est σ-finie, il existe une mesure de probabilité μ_1 dont le support est le même que celui de μ (on pourra commencer par traiter le cas μ finie).

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction borelienne telle que $\int_0^1 f^2(x)dx < +\infty$. On note $||f||_2 = (\int_0^1 f^2(x)dx)^{1/2}$.

(1) (1 pt) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\int_0^1 x^n|f(x)|dx \leq \frac{||f||_2}{\sqrt{2n+1}}$.

(2) (1 pt) Montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}|f(x)|dx < \infty\,. \tag{1}$$

(3) (1 pt) En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n} f(x)dx = -\int_0^1 \log(1-x)f(x)dx$.

(4) (2 pt) Chercher un contre-exemple à l'inégalité (1) lorsqu'on suppose seulement que f est intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Problème. Soient A et B deux boréliens de $[0,1]$ de mesures de Lebesgue strictement positives. On note $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ leurs fonctions indicatrices. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_B - f_n|(x)dx \to 0$.

(1) (2 pts) Montrer que $x \to \mathbf{1}_A \star f_n(x) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(y)f_n(x-y)dy$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformement vers $x \to \mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B(x) \doteq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(y)\mathbf{1}_B(x-y)dy$.

(2) (1 pt) Montrer que $\{\ x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B(x) > 0\ \} \subset A + B$.

(3) (2 pts) En utilisant un théorème de Fubini, montrer que $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B$ n'est pas identiquement nul et déduire que l'interieur de $A+B$ est non vide.

(4) Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et ψ_0 et ψ_1 deux fonctions de $\Omega \to [0,1]$ définies par $\psi_0(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{2n+2}}$ et $\psi_1(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{2n+1}}$ pour $\omega \doteq (x_n)_{n\geq 0} \in \Omega$.

(a) (1 pt) Montrer que les fonctions ψ_0 et ψ_1 sont continues pour la distance d sur Ω définie par $d(\omega,\omega') = \sum_{n\geq 0} |x_n - x'_n|2^{-n}$.

(b) (2 pts) On admet sans démonstration que Ω est compact et on note $K_\epsilon = \psi_\epsilon(\Omega)$ pour $\epsilon \in \{0,1\}$. Montrer que $K_0 = K_1/2$ puis que $K_0 = (K_0/4) \cup (1/4 + K_0/4)$. En déduire que $\lambda(K_0) = \lambda(K_1) = 0$.

(c) (2 pts) Montrer que $[0,1] = K_0 + K_1$. Conclure.