ENS Cachan | **Cours Intégration Proba**
Licence de Mathématiques | **2006-2007**

Examen (durée 3h)
Lundi 8 Janvier 2007
Les notes de cours ne sont pas autorisées

Les réponses aux questions doivent être rédigées avec soin et le grapillage à proscrire.

Barème indicatif : Q.C. 2 pts, Ex1 3,5 pts, Ex2 5 pts, Ex3 4,5 pts, Problème 7 pts

Questions de cours. Enoncer la loi faible des grands nombres et le théorème de Levy.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. On veut montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq 1/4$.

(1) Soit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. telle que $E(Z^2) < \infty$. Vérifier que $E((Z-a)^2) \leq V(Z) + (E(Z)-a)^2$ où $V(Z)$ est la variance de Z. En déduire que si $P(Z \in [0,1]) = 1$, alors $V(Z) \leq 1/4$.

(2) Soient $X = \mathbf{1}_A$ et $Y = \mathbf{1}_B$. On note $\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$ la covariance de X et Y.

(a) En considérant la variable $(X-Y)/2$, montrer $0 \leq V(X)/4 + V(Y)/4 - \mathrm{cov}(X,Y)/2$ puis déduire que $\mathrm{cov}(X,Y) \leq 1/4$.

(b) Montrer que si $\tilde{Y} = \mathbf{1}_{B^c}$, alors $\mathrm{cov}(X, \tilde{Y}) = -\mathrm{cov}(X,Y)$.

(c) En déduire que $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 1/4$ et conclure.

Exercice 2. Soit $Z = (X,Y)$ un vectoire aléatoire de loi uniforme sur le disque unité $D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ \}$ de densité $\mathbf{1}_D \lambda_2/\pi$.

(1) On pose $R = \sqrt{X^2+Y^2}$. Déterminer la loi de R.

(2) Montrer que $P(X=0) = P(Y=0) = 0$.

(3) On pose $U = \frac{Y}{X}\mathbf{1}_{X\neq 0}$ et $V = \frac{X}{Y}\mathbf{1}_{Y \neq 0}$. Déterminer les lois de U et V.

(4) Montrer que si U est une variable aléatoire réelle de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $g(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$, alors U à la même loi que $1/U$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X_∞. On suppose que $\sup_{n\geq 1} E(X_n^2) = M < \infty$ (bornitude L^2).

(1) Montrer que $E(X_\infty^2) \leq M$ (on pourra utiliser le lemme de Fatou).

(2) Montrer que $E(|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|>\alpha}) \leq M/\alpha$ pour tout $\alpha > 0$ puis en déduire que pour tout événement A, $E(|X_n|\mathbf{1}_A) \leq M/\alpha + \alpha P(A)$.

(3) Montrer enfin que $E(|X_n - X_\infty|) \to 0$.

(4) Donner un contre-exemple au dernier résultat si on suppose seulement que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans L^1.

Problème. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note λ_p la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$. Ce problème s'interesse à la méthode dite *de rejet* de simulation de variables aléatoires.

(1) Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^p$ tels que $B \subset A$ et $0 < \lambda_p(B) \leq \lambda_p(A) < +\infty$. On considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur A (ie $P(Z_n \in C) = \lambda_p(C \cap A)/\lambda_p(A)$ pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$). On note $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ la variable aléatoire définie par $\tau(\omega) = \inf\{\ n \geq 1 \mid Z_n(\omega) \in B\ \}$ et $\rho = \lambda_p(B)/\lambda_p(A)$.

(a) Calculer en fonction de ρ, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\tau \geq n)$ puis calculer la valeur de $E(\tau)$.

(b) Vérifier que $\mathbf{1}_{(\tau \geq n)}$ et Z_n sont indépendantes.

(c) Calculer $P(Z_n \in C,\ \tau = n)$ puis $P(Z_\tau \in C)$ pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et en déduire la loi de Z_τ (on rapelle que $Z_\tau(\omega) \doteq Z_{\tau(\omega)}(\omega)$).

(d) En supposant que l'on dispose d'une suite de variable i.i.d. $(U_n)_{n\geq 1}$ de loi uniforme sur $[0,1]$, expliquer comment construire concrètement une loi uniforme sur $B \subset [0,1]^p$ où $B = \{\ z \in [0,1]^p |\ \Phi(z) \geq 0\ \}$ et $\Phi : [0,1]^p \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne que l'on suppose facilement calculable.

(2) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ dont la loi $P_X = g\lambda_d$ et U une loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que X et U sont indépendantes et on note $Y = cUg(X)$ où $c > 0$.

(a) Soit $A_c = \{\ z = (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq cg(x)\ \}$. Vérifier que A_c est un borélien de $\mathbb{R}^{d+1}$.

(b) Montrer (en soignant vos arguments) que $Z = (X,Y)$ est une variable de loi uniforme sur A_c et que reciproquement, si $\tilde{Z}$ est une loi uniforme sur A_c, alors sa projection $\tilde{X}$ sur les d premières coordonnées a pour loi $g\lambda_d$.

(c) Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ borelienne telle que $\int f(x)dx = 1$ et $c > 0$ tel que $f(x) \leq cg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. En notant $B = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\ \}$, expliquer comment obtenir une variable aléatoire de loi $f\lambda_d$ à partir d'une famille de variables aléatoires indépendantes $(X_n, U_n)_{n\geq 1}$ où les X_n sont de loi $g\lambda_d$ et les U_n sont de loi uniforme sur $[0,1]$.