Corrigé partiel de l'examen 2006-2007

Barème indicatif : Q.C. 2 pts, Ex1 3,5 pts, Ex2 5 pts, Ex3 4,5 pts, Problème 7 pts

Problème. Ce petit problème s'intéresse à l'étude de l'algorithme de simulation de v.a. par rejet (question 2c))

(1) (a) On a $P(\tau \geq n) = P(Z_i \in A \setminus B,\ 1 \leq i \leq n-1) = \left(\frac{\lambda(A)-\lambda(B)}{\lambda(A)}\right)^{n-1}$. Comme $E(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau \geq n)$, on déduit que $E(\tau) = 1/\rho$ (en fait on reconnait que τ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}_\rho$ géométrique et de paramètre ρ).

(b) On remarque d'abord que $\mathbb{1}_{\tau \geq n}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1} \doteq \sigma(Z_i, 1 \leq n-1)$. Comme Z_n est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$ (théorème des coalitions), on déduit le résultat.

(c) On a $P(Z_n \in C, \tau = n) = P((Z_n \in C \cap B) \cap_{i=1}^{n-1} (Z_i \in A \setminus B)) = (1-\rho)^{n-1} \frac{\lambda(C \cap B)}{\lambda(A)}$. Par suite $P(Z_\tau \in C) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n \in C, \tau = n) = \frac{\lambda(C\cap B)}{\lambda(A)} \rho^{-1} = \frac{\lambda(C\cap B)}{\lambda(B)}$ et Z_τ est de loi uniforme sur B.

(d) On construit $Z_i \doteq (U_{(i-1)p+1}, \cdots, U_{ip})$ pour tout $i \geq 1$. On obtient ainsi une suite i.i.d. de v.a. de loi uniforme sur $[0,1]^p$. On définit alors $\tau \doteq \inf\{n \geq 1 \mid \Phi(Z_i) \geq 0\}$ qui est le premier instant où Z_i tombe dans B. D'après la question précédente, Z_τ est une loi uniforme sur B.

(2) (a) Il suffit de remarquer que $A_c = h^{-1}([0,\infty[^2)$ où $(x,y) \to h(x,y) \doteq (y, cg(x) - y)$ est borélienne.

(b) $(\Rightarrow)$: $P(Z \in C) = P((X, cUg(X)) \in C) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \mathbb{1}_{(x,cug(x)) \in C} g(x) dx du$. Par Fubini-Tonelli, on déduit $P(Z \in C) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{(x,cug(x))\in C} g(x) du \right) dx$. Or pour $g(x) > 0$, par le changement de variable $y = cug(x)$, on obtient

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{(x,cug(x))\in C} g(x) du = \int_0^{cg(x)} \mathbb{1}_{(x,y)\in C} dy/c = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(x,y)\in C \cap A_c} dy/c$$

Cette dernière égalité étant vraie pour $g(x) = 0$, on déduit par intégration sur x que $P(Z \in C) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{(x,y) \in C \cap A_c} dx dy/c = \int_{R^{d+1}} \mathbb{1}_{z \in C \cap A_c} dz/c$. En prenant $C = \mathbb{R}^{d+1}$, on obtient $P(A_c) = c$ et $P(Z \in C) = \lambda_{d+1}(C \cap A_c)/\lambda_{d+1}(A_c)$ i.e. (X,Y) est de loi uniforme sur A_c.

$(\Leftarrow)$: Si $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ est une loi uniforme sur A_c, on alors
$P(\tilde{X} \in B) = \int_{R^d \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{x \in B, (x,y) \in A_c} dx dy/c = \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y \leq cg(x)} dy/c) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{x \in B} g(x) dx$.
Par suite $\tilde{X}$ est de loi de densité g sur $\mathbb{R}^d$ par rapport à λ_d.

(c) On a montré qu'en posant $Z_n \doteq (X_n, cU_n g(X_n))$, la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d de loi uniforme sur A_c. En notant $\tau \doteq \inf\{n \geq 1 \mid Z_n \in B\} = \inf\{n \geq 1 \mid cU_n g(X_n) \leq f(X_n)\}$, on déduit de (1d) que Z_τ est une loi uniforme dans B. Or, en appliquant la partie réciproque de 2b) à $\tilde{Z} \doteq Z_\tau$, pour $g = f$ et $c = 1$, on déduit que $\tilde{X} \doteq X_\tau$ est de loi $f\lambda_d$.